

FACULTAD DE INGENIERÍA - UBA
ÁLGEBRA II – Segundo cuatrimestre de 2014
EXAMEN INTEGRADOR – 17 de diciembre de 2014 (Segunda fecha)

Respuestas

TEMA 1

EJERCICIO 1:

$$[T]_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \{E_{11}; E_{12} + E_{21}; E_{22}; E_{12} - E_{21}\}$$

EJERCICIO 2:

$$A = [T]_{E_{\mathbb{R}^2} E_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^+ = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \hat{x}_{\min} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

- a) Para cada autovalor α de $p(A) = A + I$ existe un autovalor λ : $\alpha = \lambda + 1$. Como $A + I$ es definida positiva: $\alpha > 0$; por lo tanto $\lambda + 1 > 0$.

Para cada autovalor β de $q(A) = A - 2I$ existe un autovalor λ : $\beta = \lambda - 2$. Como $A - 2I$ es definida negativa: $\beta < 0$; por lo tanto $\lambda - 2 < 0$.

Luego, los autovalores de la matriz A cumplen: $-1 < \lambda < 2$.

- b) Siendo $A = U \Sigma V^T$, una descomposición en valores singulares de la matriz A , las columnas v_i , $1 \leq i \leq n$, de V son autovectores de $A^T A$, por construcción; esto es, $A^T A v = \lambda v$. Las r primeras columnas de la matriz U , siendo r el rango de A , se calculan como $u_i = \frac{A v_i}{\sigma_i}$, donde σ_i es el i -ésimo valor singular de A , que será no nulo para $1 \leq i \leq r$. Multiplicando por A y dividiendo por σ_i :

$$A A^T \frac{A v_i}{\sigma_i} = \lambda \frac{A v_i}{\sigma_i} \quad \text{si y sólo si} \quad A A^T u_i = \lambda u_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad \text{Por lo tanto } u_i \text{ es autovector de } A A^T.$$

Por otra parte, $\lambda = 0$ es autovector de $A^T A$ de multiplicidad $n - r$. Luego, las $n - r$ columnas restantes de U son autovectores de $A A^T$ asociadas al autovalor 0. En efecto: $A A^T u_i = 0_{\mathbb{R}} u_i$, con $r + 1 \leq i \leq n$.

EJERCICIO 4:

- a) Para que los conjuntos de nivel $k > 0$ sean curvas cerradas, debe ser $|\alpha| < 2$.

- b) Con $\alpha = 2$, el máximo de la forma cuadrática $Q(x)$, sujeta a $x^T B x = 1$, con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, es

$$8, \text{ y se alcanza en } x = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

FACULTAD DE INGENIERÍA - UBA
ÁLGEBRA II – Segundo cuatrimestre de 2014
EXAMEN INTEGRADOR – 17 de diciembre de 2014 (Segunda fecha)

EJERCICIO 5:

$$X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 / X(t) = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{\frac{1}{3}t}$$

TEMA 2

EJERCICIO 1:

$$[T]_B \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \{E_{11}; E_{12}+E_{21}; E_{22}; E_{12}-E_{21}\}$$

EJERCICIO 2:

$$A = [T]_{E_{\mathbb{R}^2} E_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A^+ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \hat{x}_{\min} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

- a) Para cada autovalor α de $p(A) = A - I$ existe un autovalor λ : $\alpha = \lambda - 1$. Como $A - I$ es definida negativa: $\alpha < 0$; por lo tanto $\lambda - 1 < 0$.

Para cada autovalor β de $q(A) = A + 2I$ existe un autovalor λ : $\beta = \lambda + 2$. Como $A + 2I$ es definida positiva: $\beta > 0$; por lo tanto $\lambda + 2 > 0$.

Luego, los autovalores de la matriz A cumplen: $-2 < \lambda < 1$.

- b) Sea $A = U \Sigma V^T$, una descomposición en valores singulares de la matriz A .

Entonces $PA = (PU)\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de la matriz PA , ya que PU es ortogonal. En efecto: $(PU)^T PU = U^T (P^T P) U = U^T U = I$ y también $PU(PU)^T = P(UU^T)P^T = PP^T = I$. Entonces, $(PA)^+ = V\Sigma^+(PU)^T = V\Sigma^+U^T P^T = A^+ P^T$.

EJERCICIO 4:

- a) Para que los conjuntos de nivel $k \neq 0$ sean hipérbolas, debe ser $|\alpha| > 2$.

- b) Con $\alpha = 2$, el máximo de la forma cuadrática $Q(x)$, sujeta a $x^T B x = 1$, con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, es

$$8, \text{ y se alcanza en } x = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 5:

FACULTAD DE INGENIERÍA - UBA
ÁLGEBRA II – Segundo cuatrimestre de 2014
EXAMEN INTEGRADOR – 17 de diciembre de 2014 (Segunda fecha)

$$X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 / X(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{12}t}.$$